

# ANÁLISIS DE MODELOS DE VIBRACIONES EN LAJAS Y PLACAS

Avelino Samartín Quiroga

Dept. Mec. Medios Cont. y Teoría de Estructuras. ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. UPM

Carlos Moreno González

Dept. de Matemáticas. ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. UPM

Fecha de recepción: 27-IV-2001

400-38

ESPAÑA

## RESUMEN

*El presente trabajo se centra en el desarrollo de los modelos matemáticos precisos para simular las excitaciones y respuestas de carácter dinámico, que se introducen en los ensayos no destructivos de detección de imperfecciones. Las estructuras que se consideran se suponen constituidas por chapas de espesor delgado. Las fisuras, en estos casos, pueden ser penetrantes o de una profundidad significativa respecto de su espesor, o no penetrantes o superficiales, que afectan a la zona superficial de chapa. El primer tipo de fisura está relacionado con la seguridad de la estructura y el segundo más con su protección ambiental, al deteriorarse las pinturas de protección.*

*Se han considerado dos tipos de modelos: uno, que intenta localizar la posición y magnitud de las imperfecciones en la estructura, en particular las fisuras, de carácter penetrante total. Para ello se utilizan en el estudio modelos de vibraciones elásticas de estructuras delgadas como placas a flexión. El otro tipo de modelos analiza las vibraciones en lajas y en él se consideran vibraciones superficiales, como las ondas de Rayleigh.*

*Se ha comprobado, en los modelos de estructuras pasantes, que las diferencias entre las frecuencias propias de las estructuras sanas y las fisuradas no son, en general, significativas. Por otra parte, la detección de posición de las fisuras, e, incluso, su mera presencia, mediante distintas normas de comparación entre los vectores modos propios no constituye un procedimiento fiable, ya que puede depender de la posición de la fisura (por ejemplo, cercana a un borde) y del modo de vibración que la excita. El método que parece más prometedor está basado en la medida de las rotaciones (o derivadas de los modos respecto a dos ejes ortogonales) en distintos puntos de la estructura y su representación mediante curvas de nivel. La posición de la fisura se refleja de forma muy clara y, en menor medida, pero de forma significativa, su posición e inclinación. Con este método no es estrictamente preciso efectuar el ensayo (o cálculo a partir de su proyecto) de la estructura sana.*

*Finalmente, en relación con las fisuras parcialmente pasantes, la utilización de ondas superficiales permite la detección de la existencia de fisuras no penetrantes y, en menor medida, de su geometría y profundidad de penetración. La generación numérica de ondas superficiales es compleja por los problemas de disposición que se producen en el cálculo en diferencias en el tiempo y elementos finitos en el espacio.*

## SUMMARY

*This paper is related with the development of mathematical models aimed to simulate the dynamic input and output of experimental nondestructive tests in order to detect structural imperfections. The structures to be considered are composed by steel plates of thin thickness. The imperfections in these cases are cracks and they can penetrate either a significant part of the plate thickness or be micro cracks or superficial imperfections. They first class of cracks is related with structural safety and the second one is more connected to the structural protection to the environment, particularly if protective paintings can be deteriorated.*

*Two mathematical groups of models have been developed. The first group tries to locate the position and extension of the imperfection on the first class, i.e. crack. Bending Kirchhoff thin plate models belong to this first group and they are used to this respect. The another group of models is dealt with membrane structures under the superficial Rayleigh waves excitation. With group of models the micro cracks detection is intended.*

*In the application of the first group of models to the detection of cracks, it has been observed that the differences between the natural frequencies of the non cracked and the cracked structures are very small. Also modes vectors comparison using different norms are not reliable tools to detect structural imperfections, because this comparison may depends on the crack position and the excited mode. However, geometry and crack position can be identified quite accurately if this comparison is carried out between first derivatives (mode rotations) of the natural modes are used instead.*

*Finally, in relation with the analysis of the superficial crack existence the use of Rayleigh waves is very promising. The geometry and the penetration of the micro crack can be detected very accurately. The mathematical and numerical treatment of the generation of these Rayleigh waves present, however serious complexities, particularly due to the dispersion problems appearing during the analysis by finite differences along the time domain and the computation of the larger number of finite elements on the spatial coordinates needed in this model.*

## 1. Introducción

Un problema de gran importancia económica en los países industrializados corresponde a la gestión, mantenimiento y conservación de sus infraestructuras (puentes, presas, edificios, fábricas, etc.) así como medios de transporte e instalaciones. En esencia, la tarea se resume en alcanzar un conocimiento lo más exacto posible del estado de funcionamiento y de resistencia de estructuras, normalmente no monitorizadas, de forma permanente. Las características reales de la construcción de estas estructuras no son conocidas, en general, de forma precisa, lo que introduce un grado de incertidumbre acerca de su estado actual. No es de extrañar la existencia de programas europeos cuyos objetivos son desarrollar herramientas eficaces que permitan determinar el estado y la vida útil de las infraestructuras existentes. Entre estos programas, cabe citar [1] o los trabajos de la Universidad de Leuven, que utilizan modelos vectoriales autorregresivos (modelos ARMA) entre los que se pueden mencionar [4]. Una componente esencial en estos programas de investigación corresponde a la elaboración de técnicas de detección de imperfecciones en estructuras mediante ensayos no destructivos. Si bien existen procedimientos estáticos, una de las clases de ensayos más utilizadas consiste en producir un estado de vibraciones [6], libres o forzadas, que permiten poner en evidencia la existencia de las imperfecciones estructurales que se están considerando (geométricas, fisuraciones, degradaciones del material, etc.). El trabajo que aquí se presenta está incluido dentro de un proyecto de investigación, de título: *EXPLORACIÓN, MODELIZACIÓN Y OPTIMIZACIÓN DE TÉCNICAS PARA LA DETECCIÓN DE GRIETAS EN ELEMENTOS MECÁNICOS MEDIANTE HOLOGRAFÍA TVBAJO EXCITACIÓN SÓNICA Y ULTRASÓNICA*, financiado por la Comisión Interministerial Científica y Técnica, y que se lleva a cabo en colaboración con los Departamentos de Física Aplicada de las ETS de Ingenieros Industriales de la Universidad de Vigo y de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid. En este proyecto se desarrollan tanto las técnicas de excitación dinámica de la estructura a evaluar, como las de medida de su respuesta, con objeto de alcanzar una metodología que vaya dirigida hacia la detección de sus posibles imperfecciones estructurales. La descripción global de este proyecto se espera que sea objeto de una publicación futura.

En el presente estudio se analizarán los aspectos teóricos necesarios para replicar, mediante procedimientos matemáticos, el comportamiento de las estructuras bajo las acciones dinámicas y, de esta forma, identificar, tanto cualitativa como cuantitativamente, la imperfección. En el estudio se pueden distinguir dos fases: en una primera fase se analiza el efecto de la presencia de una grieta o fisura y, posteriormente, mediante la resolución de un problema inverso o de identificación, se intentará deducir su posición y geometría. Este artículo se concentrará en la primera fase. Con objeto de simplificar el lenguaje se denominará, en lo que sigue, imperfección en una estructura a determinadas modificaciones de ésta respecto a las características teóricas del proyecto, tales como la presencia de grietas y fisuras, modificación de sus propiedades elásticas o geométricas, etc. Se distinguirán dos tipos de imperfecciones: el primero incluye fisuras, en general imperfecciones, denominadas penetrantes, que afectan a todo el espesor de la estructura y, el segundo, a fisuras no pasantes; es decir, que penetran en parte del espesor de la estructura y que suelen ser difíciles de detectar, particularmente si la estructura es de espesor delgado. Para el estudio del primer tipo de situaciones se aplicará la teoría de vibraciones de placas delgadas de Kirchhoff, de fácil desarrollo y cálculo. En el segundo, se recurrirá a experimentación con ondas superficiales, en particular ondas Rayleigh, que permiten detectar fisuras con profundidades de penetración muy pequeñas.

## 2. Fisuras penetrantes. Placas elásticas

Se considera un problema modelo muy simple, con objeto de comprobar las posibilidades de los ensayos dinámicos con bajas frecuencias en estructuras de placas de flexión de espesor delgado. Se estudia el caso de una placa cuadrada simplemente apoyada en todo su contorno sujeta a vibraciones libres. El comportamiento de una placa de planta cuadrada, excitada en vibraciones libres, de lado  $a$ , espesor delgado  $h$  y simplemente apoyada en su contorno, se describe por el siguiente problema de autovalores:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w &= -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2}, \quad \text{en } 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{a lo largo de los bordes } x=0, x=a \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{a lo largo de los bordes } y=0, y=a \end{aligned} \quad (1)$$

en el cual  $\omega$  es la frecuencia normal al plano medio de la placa,  $\rho$  es la densidad por unidad de volumen. La constante de flexión de la placa  $D$  se define a partir de  $E$  (módulo de elasticidad) y de  $\nu$ , coeficiente de Poisson del material de la placa, por

la expresión:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Como es bien sabido las frecuencias naturales  $\omega_{mn}$  y los modos propios  $\Phi_{mn}$  correspondientes son:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{a} \right)^2 \right]$$

$$\Phi_{mn} = w_{mn} \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{a} \right)$$

con  $w_{mn}$  una constante de normalización.

Esta solución analítica se ha comparado con una numérica basada en el método de los elementos finitos, para comprobar el grado de refinamiento de la malla y deducir, así, el tamaño de ésta, con objeto de alcanzar un grado de precisión determinado de antemano<sup>1</sup>.

Se ha discretizado, por consiguiente, la placa mediante elementos finitos cuadrados de flexión del tipo de Tochter-Felippa. Se ha utilizado para los cálculos el programa de computador SAP90. Las mallas consideradas han sido de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $30 \times 30$  y  $40 \times 40$ . El error relativo, en tanto por ciento, cometido con cada una de estas mallas en el valor de la frecuencia, obtenido numéricamente y el analítico, que se ha supuesto exacto, variaba para la primera frecuencia desde 0,8 en la mallas menos refinada al 0,05 en la más densa. Estos valores se incrementan para la vigésima frecuencia a 1,8 y 0,09 respectivamente. Por consiguiente, se ha elegido para los cálculos numéricos posteriores mallas de  $40 \times 40$  que conducen a resultados suficientemente precisos. Se han alcanzado valores similares de las diferencias en los modos de vibración numéricos y analíticos, medidas de acuerdo con distintas normas (norma  $L_2$  o desviación media cuadrática o bien la norma  $L_\infty$  o diferencia entre los máximos valores de la componentes de los vectores normalizados).

A continuación se estudió la modificación, en relación con la placa sana o sin fisuras, que se producen en los valores de las frecuencias y modos de vibración de la placa al existir una fisura pasante en una posición y geometría dadas. La fisura se definió por las coordenadas de su centro  $x_c, y_c$ , su longitud  $l$  y el ángulo de inclinación  $\alpha$  respecto al eje de abscisas  $Ox$ , que se hicieron variar de acuerdo con el siguiente barrido:

$$x_c = \frac{a}{2} + i_1 \frac{a}{2}, \quad y_c = \frac{a}{2} + i_2 \frac{a}{2}, \quad l = j \frac{a}{2}, \quad \alpha = k \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

con  $i_1, i_2, j, k = 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}$

Los valores de la placa sana se designan con el superíndice 0 y los de la placa fisurada con el superíndice  $c$ . Se han utilizado las dos normas siguientes para la comparación entre los resultados de ambas placas

Norma  $L_\infty$   $\|\Phi^c - \Phi^0\|_\infty = \max_i (\Phi_i^c - \Phi_i^0), \quad i = 1, 2, \dots, N$

Norma  $L_2$   $\|\Phi^c - \Phi^0\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\Phi_i^c - \Phi_i^0)^2}{N}}$

<sup>(1)</sup> Existen procedimientos basados en técnicas de estimación de error a posteriori, como el conocido por Z-Z desarrollado por Zhu y Zienkiewicz [8], que permiten conocer el nivel de exactitud alcanzado en un cálculo con una malla de elementos finitos dada, así como métodos de refinamiento y de remallado automáticos. El objetivo se ha dirigido aquí en la elección de la malla adecuada para obtener resultados de frecuencias y modos propios suficientemente aproximados.



Las normas anteriores corresponden a errores absolutos, también se han considerado las dos normas en relación con los errores relativos; es decir, adoptando como variables las componentes  $\frac{\Phi_i^c - \Phi_i^0}{\Phi_i^0}$ .

Del estudio de sensibilidad anterior se comprobó que las diferencias entre los valores de las características dinámicas (primeras frecuencias y modos de vibración) de la placa sana y la fisurada no eran significativas. Como ejemplo, la figura 1 muestra el error relativo, a lo largo del eje de abscisas, de las ordenadas de los modos de vibración cuando la fisura paralela a  $Oy$ , se sitúa en el eje  $Ox$  y su longitud es constante. Se observa que los errores que se alcanzan son menores del 2 por ciento.

Tras el estudio de los distintos casos descritos en (2) se puede deducir la siguiente conclusión: la técnica anterior de comparación directa entre los modos y frecuencias de las placas sanas y fisuradas no permite detectar adecuadamente la situación de las fisuras, tanto en horizontal como en vertical, longitud e inclinación, debido a las diferencias poco significativas que aparecen en dicha comparación. Sin embargo, puede, en modos superiores al primero, producirse discontinuidades importantes en el caso de coincidencia de la posición de la fisura y de los máximos o mínimos del modo de vibración.

Una posibilidad más eficiente de detectar de forma precisa la existencia de fisura consiste en determinar las líneas de nivel de los modos de vibración en las placas fisuradas e inspeccionar posibles irregularidades. Se comprobó la efectividad de este procedimiento en algunos casos. No obstante, más contundente resultó ser la representación y comparación de las pendientes de los modos de vibración en lugar de los valores. Esta conclusión coincide con el resultado de las referencias [7] y [3]. Las siguientes figuras son ilustrativas a este respecto y merecen algún comentario. La figura 2 muestra las líneas de nivel de las flechas en una placa con una fisura con inclinación distinta de las paralelas a los ejes y una posición arbitraria. No se observa aparentemente ninguna anomalía respecto a una placa sana.

Las figuras 3 y 4 representan las isolíneas de las rotaciones según los dos ejes de coordenadas  $Ox$  y  $Oy$ . En la primera la fisura se detecta la fisura existente, aunque de forma mas difusa que en la segunda.

Se obtienen análogas conclusiones para otras posiciones e inclinaciones de fisuras, en las que, a veces, son detectadas simplemente mediante las líneas de nivel de flechas y, en otros casos, se hace preciso recurrir a las medidas más precisas de las derivadas de estas líneas. Las figuras 5 a 7 ilustran estos resultados, ya que las líneas de nivel de las flechas ya son suficientes para identificar la existencia de una fisura.

### 3. Fisuras no pasantes. Lajas elásticas excitadas por ondas Rayleigh

Las ondas Rayleigh constituyen un caso particular de ondas elásticas que se propagan a lo largo de la superficie libre del mismo. Sólo se presentan aquí los resultados finales, que permiten su modelización y cálculo numérico. En el apéndice A se resume la teoría general de ondas elásticas de volumen, un excelente resumen de la misma se presenta en [2]. Una

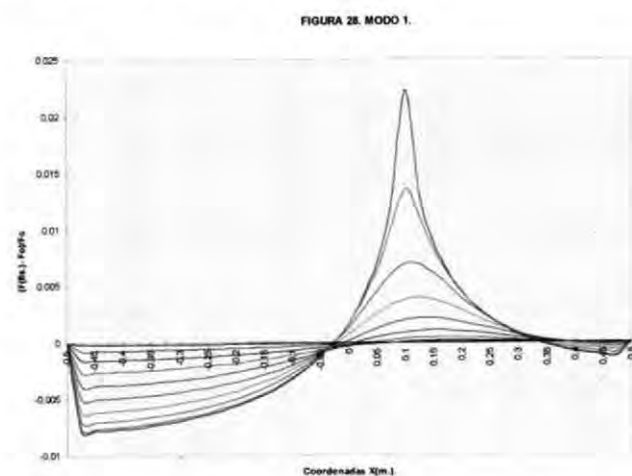


Figura 1.- Modo 1. Errores relativos.

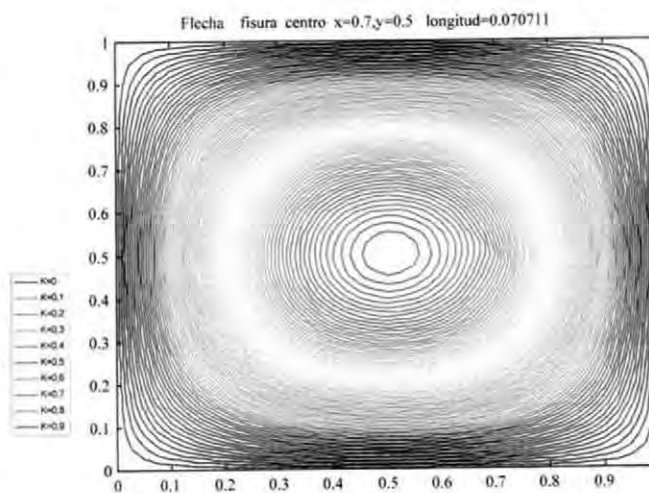


Figura 2.- Modo 1. Líneas de nivel de las flechas  $w$  de la placa con fisura inclinada en  $x=0.7a$ ;  $y=0.5a$  de longitud 0,07.

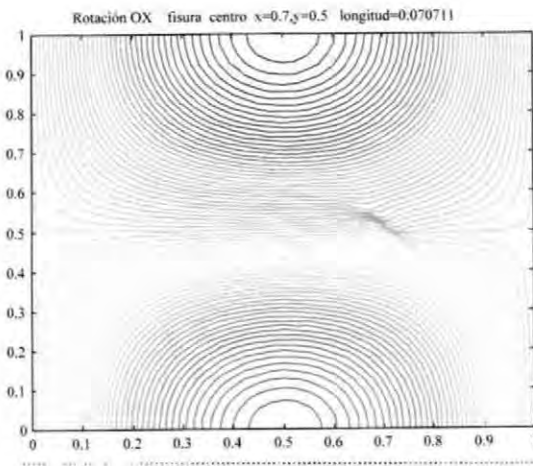


Figura 3.- Modo 1. Líneas de nivel de los giros  $\theta_x$  de la placa con fisura inclinada en  $x = 0,7a$ ;  $y = 0,5a$  de longitud 0,07.

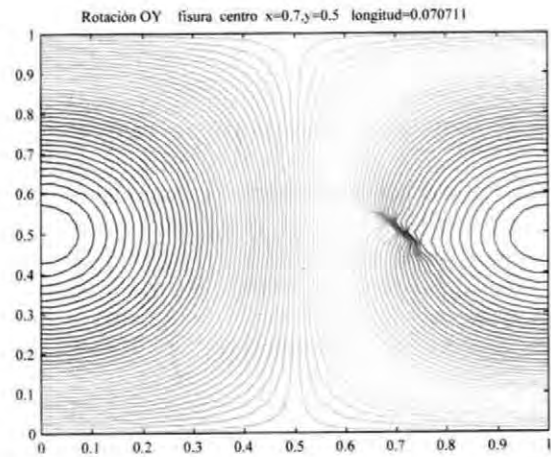


Figura 4.- Modo 1. Líneas de nivel de los giros  $\theta_y$  de la placa con fisura inclinada en  $x = 0,7a$ ;  $y = 0,5a$  de longitud 0,07.

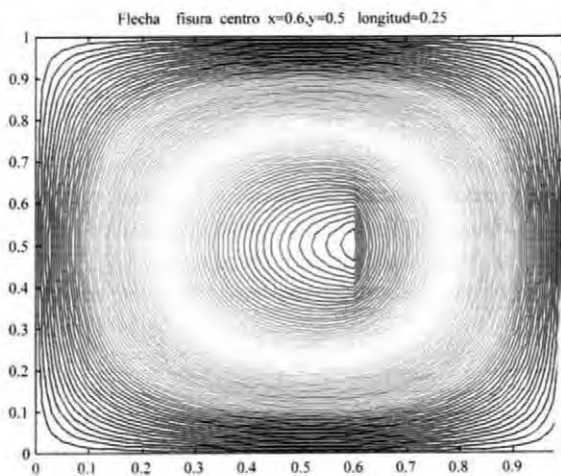


Figura 5.- Modo 1. Líneas de nivel de las flechas  $w$  de la placa con fisura vertical en  $x = 0,6a$ ;  $y = 0,5a$  de longitud 0,25.

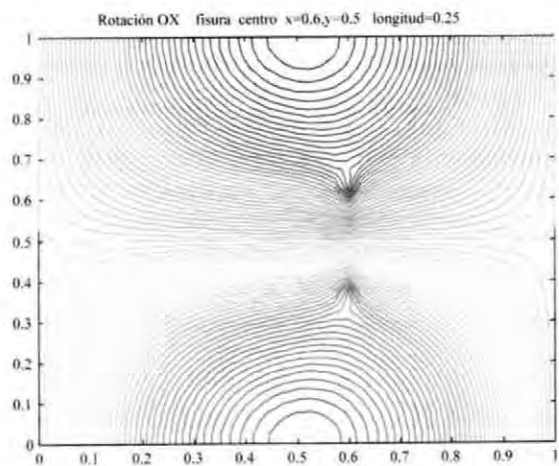


Figura 6.- Modo 1. Líneas de nivel de los giros  $\theta_x$  de la placa con fisura vertical en  $x = 0,6a$ ;  $y = 0,5a$  de longitud 0,25.

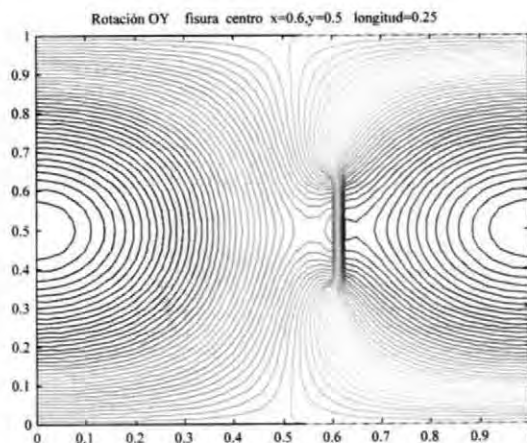


Figura 7.- Modo 1. Líneas de nivel de los giros  $\theta_y$  de la placa con fisura vertical en  $x = 0,6a$ ;  $y = 0,5a$  de longitud 0,25.

descripción mas detallada de las ondas superficiales puede verse en el reciente texto [5].

Estas ondas de superficie constituyen un caso particular de ondas elásticas que se propagan cerca de la superficie de un sólido semiinfinito sin penetrar en él. Se supone que el sólido elástico ocupa el dominio  $x_3 < 0$  y que las ondas se propagan a lo largo del plano frontera  $x_3 = 0$  según la dirección  $Ox_1$ . El problema es de elasticidad bidimensional, deformación plana, por lo que se consideran solamente el plano  $x_2 = 0$ , es decir, el contenido en los ejes de coordenadas cartesianas  $Ox_1, x_3$ .

La ecuación de las ondas para cualquier componente  $u$  del vector desplazamiento, ya sea longitudinal,  $u_1$ , o transversal,  $u_3$ , es del tipo:

$$\ddot{u} - c^2 \Delta u = 0 \quad (3)$$

con  $c = c_t$  o  $c = c_l$  la velocidad de propagación de las ondas según  $u$  sea una componente de  $u_t$  o de  $u_l$ .

La solución de (3) se supone en la forma:

$$u = e^{i(kx_1 - \omega t)} f(x_3) \quad (4)$$

que al sustituirla en (3) resulta

$$\frac{d^2 f}{dx_3^2} = \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) f(x_3) \quad (5)$$

Si  $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0$  entonces la onda periódica no se amortigua dentro del sólido y la onda no es superficial. Se supone, pues,

que  $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0$  con lo que resulta, al integrar (5):

$$f(x_3) = C e^{\pm x_3 \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} \quad (6)$$

Se observa que para  $x_3 \rightarrow -\infty$  se tiene que  $f(x_3) \rightarrow 0$  y al introducir el parámetro

$$\mu = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

la expresión (6) se modifica en la siguiente:

$$f(x_3) = C e^{\mu x_3} \quad (7)$$

y, por consiguiente, el desplazamiento de la onda dado por (4) se convierte en:

$$u = C e^{i(kx_1 - \omega t)} e^{\mu x_3} \quad (8)$$

El verdadero vector desplazamiento es suma de los vectores  $u_t$  y  $u_l$ , cuyas componentes satisfacen la ecuación (3) con  $c = c_t$  o  $c = c_l$ , según el caso. La combinación de ambas ondas se determina de forma que se produzcan tensiones nulas a lo largo del borde libre  $x_3 = 0$  que limita el sólido elástico; es decir, se debe cumplir  $\sigma_{ij} n_j$  con notación de índices repetidos y  $n = (n_i)$  el vector unitario normal al contorno, en este caso  $n = (0, 0, 1)$ . Al ser un problema de elasticidad 2-D, el vector desplazamiento total es de la forma  $u = u(x_i, x_3)$  y al tener en cuenta las condiciones de borde libre se obtienen los siguientes valores para las componentes del tensor de tensiones:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

La aplicación de las ecuaciones constitutivas del material en forma de flexibilidad o de Hooke, permiten expresar las condiciones de contorno de borde libre en términos de las deformaciones:

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0, \quad \epsilon_{33} - \nu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = 0$$

Al expresar las deformaciones en función de los desplazamientos, las igualdades anteriores se convierten en las siguientes:

$$\frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = 0 \quad (10)$$

$$u_{3,3} - \nu(u_{1,1} + u_{2,2}) = 0 \quad (11)$$

La condición (10) conduce a

$$u_{2,3} = 0, \quad C \mu e^{i(kx_1 - \omega t)} e^{\mu x_3} = \mu u_2 = 0$$

luego  $u_2 = 0$ . El vector desplazamiento está contenido en el plano  $Ox_1 x_3$ , es decir, el que contiene la dirección de propagación y es perpendicular a la superficie libre.

La componente transversal del desplazamiento tiene que cumplir la condición  $\text{div } u_t = 0$ , que implica:

$$u_{t1,1} + u_{t3,3} = 0 \rightarrow ik u_{t1} + \mu_t u_{t3} = 0 \rightarrow \frac{u_{t1}}{u_{t3}} = -\frac{\mu_t}{ik} \quad (12)$$

con

$$\mu_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}$$

De la condición (12) se deducen, salvo una constante  $A$  los desplazamientos transversales:

$$u_{t1} = A\mu_t e^{i(kx_1 + \omega t) + \mu_t x_3}, \quad u_{t3} = -iAke^{i(kx_1 + \omega t) + \mu_t x_3} \quad (13)$$

Análogamente, se tiene que la parte longitudinal del vector desplazamiento de la onda de Rayleigh cumple la condición de que su rotacional es nulo, es decir,  $\text{rot } \mathbf{u}_r = 0$ , que desarrollada conduce a las siguientes igualdades

$$u_{11,3} - u_{13,1} = 0 \rightarrow ik u_{13} - \mu_t u_{11} = 0 \rightarrow \frac{u_{11}}{u_{13}} = \frac{ik}{\mu_t} \quad (14)$$

con  $\mu_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}$ .

La relación (14) permite obtener las expresiones de los desplazamientos longitudinales, salvo una constante  $B$ :

$$u_{11} = Bke^{i(kx_1 + \omega t) + \mu_t x_3}, \quad u_{13} = -iB\mu_t e^{i(kx_1 + \omega t) + \mu_t x_3} \quad (15)$$

Finalmente, si se consideran las condiciones de contorno (9) y (11), éstas se pueden escribir como sigue:

$$u_{1,3} + u_{3,1} = 0, \quad c_t^2 u_{3,3} + (c_l^2 - c_t^2) u_{1,1} = 0 \quad (16)$$

Al sustituir en la ecuación (16) las expresiones de los desplazamientos totales  $u_1 = u_{11} + u_{1r}$ ;  $u_3 = u_{13} + u_{1r}$  se obtiene el sistema de ecuaciones lineales y homogéneo:

$$\begin{bmatrix} k^2 + \mu_t^2 & 2k\mu_t \\ 2c_t^2 k\mu_t & c_t^2(\mu_t^2 - k^2) + 2c_l^2 k^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

La condición de existencia de solución no nula en (17) es:

$$(k^2 + \mu_t^2)^2 = 4k^2 \mu_t \mu_l \quad (18)$$

que permite determinar las pulsaciones  $\omega$  en función del número de onda  $k$  y de la relación de las velocidades de onda transversal y longitudinal

$$\lambda = \frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)}},$$

de acuerdo con la siguiente ecuación, equivalente a la condición (18):

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8(3 - 2\lambda^2)\xi^2 - 16(1 - \lambda^2) = 0 \quad (19)$$

con la notación

$$\xi = \frac{\omega}{c_t k}.$$

Una vez calculado  $\xi$  se obtienen las constantes  $A$  y  $B$  salvo un factor, que se adapta a la unidad, y cuyos valores son:

$$A = -(2 - \xi^2), \quad B = 2\sqrt{1 - \xi^2} \quad (20)$$

La frecuencia en las ondas superficiales, transversales y longitudinales, es proporcional al número de onda con una constante de proporcionalidad igual a la velocidad de propagación de las ondas  $U$ , luego se tiene  $U = c_t \xi$ .

Las constantes  $\mu_t$  y  $\mu_l$  se deducen a partir de las igualdades:

$$\mu_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}} = k\sqrt{1 - \xi^2}, \quad \mu_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}} = k\sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2} \quad (21)$$

Las expresiones de los desplazamientos son:

$$u_{t1} = -k(2 - \xi^2)\sqrt{1 - \xi^2} e^{k[ix_1 - iUt + \sqrt{1 - \xi^2} x_3]} \quad (22)$$

$$u_{t3} = ik(2 - \xi^2) e^{k[ix_1 - iUt + \sqrt{1 - \xi^2} x_3]} \quad (23)$$

$$u_{l1} = 2k\sqrt{1 - \xi^2} e^{k[ix_1 - iUt + \sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2} x_3]} \quad (24)$$

$$u_{l3} = -2ik\sqrt{1 - \xi^2}\sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2} e^{k[ix_1 - iUt + \sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2} x_3]} \quad (25)$$



Finalmente, se debe tener en cuenta que entre las soluciones de (19) se tienen que elegir aquéllas que satisfagan la desigualdad  $0 \leq \xi \leq 1$  ya que por definición  $\xi$  es positiva y las constantes  $\mu_t$  y  $\mu_l$  son reales. Por otra parte, conviene observar

que  $\lambda$  cumple la condición  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  por lo que sólo existe una solución de (19) con esas características, que está

comprendida en el intervalo  $0,874 \leq \xi \leq 0,955$ . Se observa, por otra parte, que para profundidades mayores que dos veces la longitud de onda, es decir,  $x_3 < -2/k$  los desplazamientos son despreciables, lo que equivale a suponer que toda la energía de la onda se concentra a lo largo de la superficie del sólido elástico.

#### 4. Modelo de cálculo

Las ondas de Rayleigh pueden ser generadas numéricamente mediante un modelo de cálculo representado por un problema de condiciones iniciales y de contorno. De esta forma, es posible comprobar las modificaciones que se producen en las ondas de Rayleigh cuando se transmiten en un sólido con imperfecciones. La solución analítica en estos casos no es posible y se hace preciso recurrir a métodos numéricos de resolución del problema de contorno-condiciones iniciales citado. Se supone que a través del sólido elástico semiinfinito definido por el dominio  $x_3 \leq 0$  se propaga a lo largo del contorno  $x_3 = 0$  una onda Rayleigh. Se admite que en el instante  $t = 0$  llega el frente de onda a la sección  $x_1 = 0$ , con lo que la región del sólido  $x_1 > 0$  se encuentra en reposo. Las características conocidas del material del sólido son:

- .  $E$  = módulo de elasticidad longitudinal
- .  $\nu$  = coeficiente de Poisson
- .  $\rho$  = densidad

Las velocidades de las ondas longitudinales y transversales que componen la de Rayleigh alcanzan los valores

$$c_l^2 = \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$$

Si el número de onda  $k$  es conocido, los desplazamientos longitudinales y transversales de la onda de Rayleigh son<sup>2</sup>:

$$u_{t1} = \mu_t A e^{ikx_1 + \mu_t x_3 - i\omega t} \quad (26)$$

$$u_{t3} = -ik A e^{ikx_1 + \mu_t x_3 - i\omega t} \quad (27)$$

$$u_{l1} = k B e^{ikx_1 + \mu_l x_3 - i\omega t} \quad (28)$$

$$u_{l3} = -i\mu_l B e^{ikx_1 + \mu_l x_3 - i\omega t} \quad (29)$$

siendo, con  $K$  una constante arbitraria

$$A = -(2 - \xi^2)K, \quad B = 2K\sqrt{1 - \xi^2}, \quad U = c_t \xi, \quad \lambda = \frac{c_t}{c_l} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}$$

$$\mu_t = k\sqrt{1 - \xi^2}, \quad \mu_l = k\sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2}, \quad \omega = kc_t \xi$$

y la variable adimensional  $\xi$  es la raíz comprendida entre 0 y 1 de la ecuación algebraica siguiente:

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8(3 - 2\lambda^2)\xi^2 - 16(1 - \lambda^2) = 0$$

Los desplazamientos totales de la onda de Rayleigh son entonces

$$u_1 = u_{t1} + u_{l1}; \quad u_3 = u_{t3} + u_{l3}$$

y si se toman sus partes reales resultan:

$$u_1 = (A\mu_t e^{\mu_t x_3} + Bk e^{\mu_l x_3}) \cos(kx_1 - \omega t) \quad (30)$$

$$u_3 = (A k e^{\mu_t x_3} + B \mu_l e^{\mu_l x_3}) \sin(kx_1 - \omega t) \quad (31)$$

<sup>(2)</sup> Se adoptarán en el cálculo numérico las partes reales de las expresiones complejas que se utilizan en el texto.



o bien :

$$u_1 = K f_1(x_3) \cos(kx_1 - \omega t) \quad (32)$$

$$u_3 = K f_3(x_3) \text{sen}(kx_1 - \omega t) \quad (33)$$

con

$$f_1(x_3) = -(2 - \xi^2) \sqrt{1 - \xi^2} e^{kx_3 \sqrt{1 - \xi^2}} + 2 \sqrt{1 - \xi^2} k e^{kx_3 \sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2}} \quad (34)$$

$$f_3(x_3) = (2 - \xi^2) k e^{kx_3 \sqrt{1 - \xi^2}} - 2 \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2} e^{kx_3 \sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2}} \quad (35)$$

Por consiguiente, en la cara  $x_1 = 0$  se imponen en cada instante  $t$  los siguientes movimientos:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_3, t) = f_1(x_3) \cos(\omega t), \quad \bar{u}_3 = \bar{u}_3(x_3, t) = f_3(x_3) \text{sen}(\omega t)$$

Los desplazamientos totales  $\mathbf{u}^T = \mathbf{u}(x_1, x_3, t)^T = \{u_1^T, u_3^T\}$ , que se producen como respuesta al frente de onda anterior en la parte del sólido  $\Omega$  comprendida entre  $x_1 = 0$  y  $x_3 = 0$  es la solución del problema de condiciones iniciales y de contorno siguiente:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}^T) + \rho \ddot{\mathbf{u}}^T = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (36)$$

con las condiciones de contorno, aplicables para  $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= \{\bar{u}_1(x_3, t), \bar{u}_3(x_3, t)\} & \text{en } x_1 = 0 \\ \mathbf{u}^T &= \{0, 0\} & \text{en } x_3 \rightarrow -\infty \\ \mathbf{u}^T &= \{0, 0\} & \text{en } x_3 \rightarrow \infty \\ \sigma_{33}^T &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \\ \sigma_{13}^T &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

y las condiciones iniciales, válidas en  $x_1 > 0$ ;  $x_3 < 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_3, t)^T &= \mathbf{0} \quad \text{para } t = 0 \\ \dot{\mathbf{u}}(x_1, x_3, t)^T &= \mathbf{0} \quad \text{para } t = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Se designa por  $\mathbf{L}$  el operador matricial de dimensión  $2 \times 2$  diferencial elíptico de segundo orden en las coordenadas espaciales  $x_1$  y  $x_3$  de la elasticidad, es decir,

$$\mathbf{L} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & \frac{3}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema de contorno y condiciones iniciales representado por el conjunto de ecuaciones (36), (37) y (38) se procede al siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^s + \mathbf{u} \quad (39)$$

con  $\mathbf{u}^s$  la solución conocida como pseudoestática del problema anterior, es decir, la solución del problema de contorno:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}^s) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (40)$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^s &= \{\bar{u}_1(x_3, t), \bar{u}_3(x_3, t)\} & \text{en } x_1 = 0 \\ \mathbf{u}^s &= \{0, 0\} & \text{en } x_3 \rightarrow -\infty \\ \mathbf{u}^s &= \{0, 0\} & \text{en } x_3 \rightarrow \infty \\ \sigma_{33}^s &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \\ \sigma_{13}^s &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Dado el carácter lineal del problema de contorno definido por las ecuaciones (40) y (41) es válido el principio de superposición y, por lo tanto, sólo se precisa resolver los dos siguientes problemas de contorno ( $i = 1, 2$ ) independientes de la variable tiempo  $t$ :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_{0i}^s) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{0i}^s &= \{f_1(x_3), 0\} & \text{en } x_1 = 0 & \text{ si } i = 1 \\ \mathbf{u}_{0i}^s &= \{0, f_3(x_3)\} & \text{en } x_1 = 0 & \text{ si } i = 2 \\ \mathbf{u}_{0i}^s &= \{0, 0\} & \text{en } x_3 \rightarrow -\infty \\ \mathbf{u}_{0i}^s &= \{0, 0\} & \text{en } x_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_{330i}^s &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \\ \sigma_{130i}^s &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \end{aligned}$$

La solución  $\mathbf{u}^s$  se obtiene entonces mediante la superposición de los dos cálculos anteriores, es decir:

$$\mathbf{u}^s = \mathbf{u}_{01}^s \cos(\omega t) + \mathbf{u}_{02}^s \sin(\omega t) \quad (42)$$

Al sustituir (39) en el problema de condiciones iniciales y de contorno definido por (22), (37) y (38) y teniendo en cuenta la expresión (42) se obtiene el nuevo problema dinámico de elasticidad 2-D, con condiciones iniciales y de contorno homogéneas nulas siguientes:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \rho \ddot{\mathbf{u}} = \omega^2 \rho \mathbf{u}^s \quad \text{en } \Omega \quad (43)$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{0, 0\} & \text{en } x_1 = 0 \\ \mathbf{u} &= \{0, 0\} & \text{en } x_3 \rightarrow -\infty \\ \mathbf{u} &= \{0, 0\} & \text{en } x_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_{33} &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \\ \sigma_{13} &= 0 & \text{en } x_3 = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

y las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_3, t) &= 0 \quad \text{para } t = 0 \\ \dot{\mathbf{u}}(x_1, x_3, t) &= 0 \quad \text{para } t = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

El problema de condiciones iniciales y de contorno definido por las ecuaciones (43), (44) y (45) no presenta discontinuidades en el contorno y, por consiguiente, su comportamiento numérico es más regular.

## 5. Simulación numérica. Aplicación

En la simulación numérica de ondas elásticas se utilizan, con diferentes ventajas e inconvenientes, métodos de diferencias finitas, de elementos finitos y de elementos de contorno. En este trabajo, se usa un esquema en diferencias finitas para la discretización temporal del modelo continuo y un método de elementos finitos para la discretización espacial.

La ventaja de los elementos finitos reside en su versatilidad para refinar la malla en las zonas previsiblemente próximas a la fisura y en las zonas superficiales por donde se desplazan las ondas de Rayleigh. Se han utilizado elementos finitos isoparamétricos bilineales con interpolación en los vértices de los cuadriláteros de la red. La cuadratura numérica se ha llevado a cabo con una fórmula de Gauss de 4 nudos.

La discretización espacial conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales de gran tamaño. Al fin de aumentar la precisión y disminuir los efectos disipativos y dispersivos de un esquema, se ha considerado un esquema trapezoidal que produce un método implícito incondicionalmente estable de segundo orden de precisión, incluido en la llamada familia de métodos de Newmark. Los parámetros seleccionados del método han sido  $\beta = 1/4$  y  $\gamma = 1/2$ .

Esta técnica numérica se aplicó en la simulación de un experimento llevado a cabo sobre una laja de aluminio de dimensiones  $130 \times 400$  mm en planta y 20 mm de espesor. Las características del material de la laja son las siguientes:  $E = 7,41 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>,  $\rho = 2,7 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> y  $\nu = 0,3302$ . Se ha supuesto un número de onda  $k = 2\pi/3 \times 10^3$  m<sup>-1</sup>.

Con los datos anteriores se obtienen los siguientes resultados intermedios:

$$\begin{aligned} c_l &= 6379,07 \text{ m/seg}, & c_t &= 3211,84 \text{ m/seg} \\ \lambda &= \frac{c_t}{c_l} = 0,503496, & \xi &= 0,932053 \\ U &= 2923,61 \text{ m/seg}, & \omega &= 6269791,88 \text{ rad/seg}, & f &= 997869 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Se presenta aquí el estudio en la laja sana (sin fisuras) y la misma, pero con una microfisura rectangular, de dimensiones  $6,933 \times 10^{-4}$  metros de ancho y  $1,25 \times 10^{-3}$  metros de profundidad, que representa uno de los casos del estudio que se está efectuando con una serie de placas dañadas con fisuras de distinta geometría (rectangular y triangular isósceles) definidas por su ancho en su base ( $b$ ) y por la profundidad de penetración ( $h$ ). Se ha observado que, en general, esta técnica de ensayo permite conocer la existencia de fisuras si estas son de suficiente espesor para que los desplazamientos entre sus caras no produzcan impacto entre ellas (el modelo no sería lineal).

Dadas las características del ensayo y con objeto de limitar el esfuerzo de cálculo se consideró solamente un quinto de la longitud de la placa, conservando la altura. Por lo tanto las dimensiones de la pieza considerada se han elegido, por economía de cálculo:  $L_1 = 0,026$  y  $L_3 = 0,020$  metros. Se ha utilizado en el modelo una malla de elementos finitos de 1.891 nudos y 1.900 elementos. La proporción entre el número de elementos en las direcciones vertical y horizontal se eligió de forma tal que se conservase la proporción de las dimensiones altura y longitud anteriores. Por otra parte, se refinó la malla de elementos finitos en la cercanía del borde  $x_1 = 0$ , de forma que la región de la laja definida por  $0 \leq x_1 \leq L_1/3$ ;  $0 \leq x_3 \leq L_3/8$  se dividió en 25 elementos según la altura y los correspondientes según la longitud. En relación con los restantes cuadrantes se procedió de forma análoga. El tamaño del paso de tiempo  $t = 2 \times 10^{-8}$  y el tiempo máximo de interés  $DT = 3 \times 10^{-6}$  segundos.

El tiempo de cálculo ha sido de 2.460 segundos de CPU de un Pentium III de 500 MHz.

En las figuras 8 y 9 se presenta el comportamiento de las ondas Rayleigh en la placa sana y la dañada. Se observa que incluso la presencia de una microfisura se detecta inmediatamente al detenerse el paso de las ondas. En el modelo 3-D que se está desarrollando, esta característica permite deducir experimentalmente el tamaño y posición de las fisuras no penetrantes, detenerse las ondas al contacto con la fisura y observar este hecho en la planta de la muestra.

## 6. Agradecimientos

Los autores desean expresar sus agradecimiento a la Comisión Interministerial Científica y Técnica por la financiación del proyecto de investigación TAP 1999-C03-03, del cual el presente trabajo constituye parte.

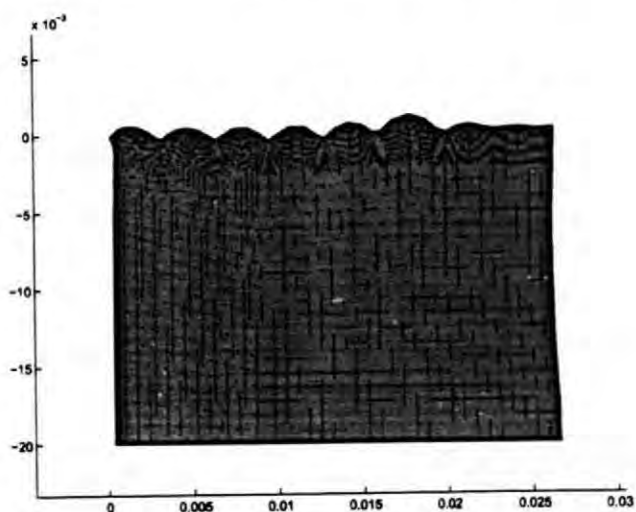


Figura 8.- Laja sin fisuras.

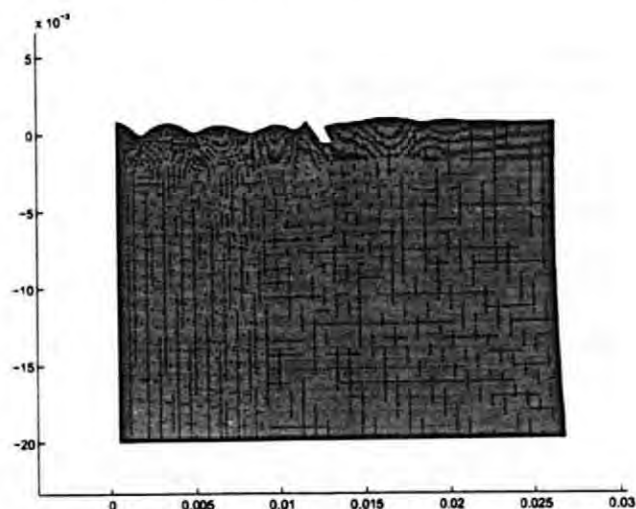


Figura 9.- Laja con fisuras.

## Apéndice A

### Ecuación general de las ondas elásticas

Una introducción al estudio de ondas elásticas puede verse en [2], y una referencia específica más reciente que incluye un análisis más detallado del tema corresponde a [5].

Las ecuaciones de equilibrio dinámico de un sólido elástico e isótropo 3-D sometido a vibraciones libres no amortiguadas son

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (46)$$

en las que  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son las componentes de los movimientos en un punto genérico  $(x_j)_{j=1,2,3}$  del sólido y en un instante dado  $t$ , según los ejes de coordenadas cartesianas  $x_j$ . La densidad del material del sólido es  $\rho$ . La derivada segunda de  $u_i$  respecto al tiempo  $t$  se designa por  $(\ddot{u}_i)$  y su derivada espacial respecto a la coordenada  $x_j$  se escribe como  $u_{i,j}$ . Se utiliza el convenio de suma en índices repetidos.

Las ecuaciones constitutivas del material elástico y lineal del sólido se escriben en forma de rigidez, de acuerdo con Lamé, como sigue:

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} \quad (47)$$

siendo  $\epsilon_{ij}$  las deformaciones, que se expresan en función de los desplazamientos, en la forma  $\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$ , la deformación volumétrica  $\epsilon = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ , símbolo de Kronecker  $\delta_{ij}$  definido por  $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y las constantes elásticas del material  $E$  y  $\nu$ , el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, respectivamente.

Al derivar la ecuación (47) respecto a la variable  $x_j$  resulta la igualdad:

$$\sigma_{ij,j} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{kk,i} + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij,j}$$

que sustituida en (46) permite obtener las ecuaciones de equilibrio expresadas en desplazamientos o ecuaciones de equilibrio de Lamé:

$$\frac{E}{2(1+\nu)} u_{ij,j} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} u_{k,ik} = \rho \ddot{u}_i \quad (48)$$

Las tres ecuaciones (48) se pueden expresar en forma vectorial como sigue:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{2(1+\nu)}{E} \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (49)$$

En esta ecuación (49) se recogen las componentes de los desplazamientos en un vector  $\mathbf{u} = \{u_i\}$  y se introduce el vector operador nabla ( $\nabla$ ), definido como

$$\nabla = \mathbf{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

El producto escalar consigo mismo de este vector operador nabla genera el operador laplaciano ( $\Delta$ ); es decir,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \delta^2 / \delta x_i^2$ . El vector resultante de la aplicación del operador nabla a un escalar  $u$  se conoce como  $\mathbf{grad} u$  y su producto escalar con un vector  $\mathbf{u}$  es la divergencia del vector o  $\operatorname{div} \mathbf{u}$ .

Por consiguiente, la ecuación (49) se puede escribir de forma alternativa:

$$(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{2(1+\nu)}{E} \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (50)$$



## Ondas elásticas en un medio infinito

### Ondas planas

Se comienza con un caso muy simple de ondas elásticas en un medio infinito denominado de ondas planas, es decir, aquéllas cuyo movimiento de propagación  $u$  depende de una coordenada, sea por ejemplo  $x_1$ . Se tiene entonces que la expresión del vector  $\mathbf{u}$  es

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1) = u_1(x_1)\mathbf{x}_1 + u_2(x_1)\mathbf{x}_2 + u_3(x_1)\mathbf{x}_3 = u_i(x_1)\mathbf{x}_i$$

que implica que  $u_i \neq 0$  para  $i=1$ . Entonces la ecuación (50) se descompone en las siguientes:

$$u_{1,11} - \frac{1}{c_l^2} \ddot{u}_1 = 0 \quad \text{con} \quad c_l^2 = \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (51)$$

$$u_{i,11} - \frac{1}{c_t^2} \ddot{u}_i = 0 \quad \text{con} \quad c_t = \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \quad i = 2, 3 \quad (52)$$

Se observa que las ecuaciones (51) y (52) son las ecuaciones de onda en una dimensión, con las velocidades de propagación  $c_l$  y  $c_t$  en la dirección longitudinal  $x_1$  y transversal  $x_i$  ( $i=2, 3$ ) respectivamente. La relación entre ambas velocidades está limitada ya que se tiene al considerar que  $0 \leq \nu \leq 0,5$ :

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1-2\nu}} \geq \sqrt{1 + \min\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)} = \sqrt{2} \rightarrow \frac{c_l}{c_t} \geq \sqrt{2}$$

La deformación volumétrica  $\varepsilon_v = \Delta v/v$  se expresa mediante la igualdad:  $\varepsilon_v = \varepsilon_{kk} = u_{ii} = \text{div } \mathbf{u}$

En el caso de las ondas transversales se tiene que  $u_1 = 0$  y los restantes desplazamientos dependen solamente de la coordenada  $x_1$ , por lo que  $\varepsilon_v = 0$ . Se puede concluir que en las ondas transversales  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  y se propagan sin cambio de volumen del sólido elástico. Por el contrario, en las ondas longitudinales existe divergencia no nula  $\text{div } \mathbf{u} \neq 0$  y se propagan modificando el volumen del sólido, mediante una sucesión alternativa de expansiones y contracciones.

### Ondas arbitrarias

Se supone ahora que la onda se propaga de forma arbitraria en el sólido infinito. La ecuación (49) se puede expresar en la siguiente forma:

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (53)$$

Como es bien conocido en cálculo vectorial, un vector puede descomponerse de forma única en suma de dos, uno de ellos tal que su divergencia es nula y el otro irrotacional, es decir, tal que su producto vectorial con el operador *nabla* es nulo. Se puede suponer, pues, que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$  con  $\text{div } \mathbf{u}_l = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  y  $\text{rot } \mathbf{u}_t = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ . Al sustituir esta descomposición del vector  $\mathbf{u}$  en la ecuación (53) se tiene:

$$c_t^2 \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \mathbf{u}_l = \ddot{\mathbf{u}}_l + \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (54)$$

Al tomar divergencias en la ecuación anterior (54) resulta:

$$c_t^2 \Delta \text{div } \mathbf{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \text{div } \mathbf{u}_l = \text{div } \ddot{\mathbf{u}}_l \quad (55)$$

es decir,

$$\text{div } (c_t^2 \Delta \mathbf{u}_l - \ddot{\mathbf{u}}_l) = 0 \quad (56)$$

Por otra parte, al ser  $\text{rot } \mathbf{u}_l = 0$  se deduce que  $\text{rot } (c_t^2 \Delta \mathbf{u}_l - \ddot{\mathbf{u}}_l) = 0$ , lo que, en virtud de la unicidad de la descomposición del vector  $c_t^2 \Delta \mathbf{u}_l - \ddot{\mathbf{u}}_l$ , se tiene que cumplir:

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u}_l - \ddot{\mathbf{u}}_l = 0 \quad (57)$$

De forma semejante, al tomar rotacionales en (54) se deduce:

$$c_t^2 \Delta \text{rot } \mathbf{u}_t + (c_l^2 - c_t^2) \text{rot grad div } \mathbf{u}_l = \text{rot } \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (58)$$

Como  $\text{rot grad } \mathbf{u} = 0$  resulta  $\text{rot}(c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t - \ddot{\mathbf{u}}_t) = 0$  y al ser  $\text{div } \mathbf{u}_t = 0$  se tiene  $\text{div}(c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t - \ddot{\mathbf{u}}_t) = 0$ , lo que equivale a la ecuación:

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t - \ddot{\mathbf{u}}_t = 0 \quad (59)$$

Las ecuaciones (57) y (59) son las ecuaciones de ondas en tres dimensiones, en las que las ondas transversales son tales que sus movimientos  $\mathbf{u}_t$  no producen deformación de volumen  $\text{div } \mathbf{u}_t = 0$  y las longitudinales generan, sin embargo, cambios de volumen  $\text{div } \mathbf{u}_t \neq 0$ .

La solución de los desplazamientos de una onda elástica y monocromática es del tipo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$  (60)

en la que  $i = \sqrt{-1}$  y la solución a considerar puede ser la parte real o imaginaria de esta expresión compleja. En el cálculo posterior se considera la parte real. El vector de desplazamientos  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  es estacionario y depende únicamente de las coordenadas espaciales o del vector posición  $\mathbf{r} = x_i x_i$  del punto. Por otra parte, si se sustituye la expresión (60) en la ecuación (53) se deduce que el vector  $\mathbf{u}_0$  tiene que satisfacer la ecuación diferencial:

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u}_0 + (c_l^2 - c_t^2) \text{grad div } \mathbf{u}_0 + \omega^2 \mathbf{u}_0 = 0 \quad (61)$$

Las partes longitudinal  $\mathbf{u}_{l0}$  y transversal  $\mathbf{u}_{t0}$  de la onda, en las que se descompone el vector  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{l0} + \mathbf{u}_{t0}$ , son, respectivamente, solución de las siguientes ecuaciones, que representan las resultantes de sustituir la igualdad (61) en las expresiones (57) y (59):

$$\Delta \mathbf{u}_{l0} + k_l^2 \mathbf{u}_{l0} = 0 \quad (62)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{t0} + k_t^2 \mathbf{u}_{t0} = 0 \quad (63)$$

en las que  $k_l = \omega/c_l$  y  $k_t = \omega/c_t$  son los respectivos números de onda de las ondas longitudinales y transversales.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Baumgartner, W. and Waubke, H. Traffic load assesment of bridges by permanent stress measurement. In Proc. Third Conference on Bridge Management, abril 1996.
- [2] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. Theory of Elasticity. Vol. 7 of Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, New York, 1959.
- [3] Pandey, A. K., Biswas, M. and Samman, M. M. Damage detection from changes in curvature mode shape. Journal of Sound and Vibration, 145(2):321-332, 1991.
- [4] Peeters, B., De Roeck, G., Pollet, L. and Schueremans, L. Stochastic subspace techniques applied to parameter identification of civil engineering structures. In Proc. of New Advances in Modal Synthesis of Large Structures: Nonlinear, Damped and Nondeterministics Cases, pages 151-162, octubre, 1995.
- [5] Royer, D. and Dieulesaint, E. Elastic Waves in solids. Vol I and II. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.
- [6] Wang, X., Hu, N., Fukunaga, H. and Yao, Z. H. Structural damage identification using static test data and changes in frequencies. Engineering Structures, 23(6):610-621, 2001.
- [7] Yuen, M. N. F. A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever. Journal of Sound and Vibration, 103(3):301-310, 1985.
- [8] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

\*\*\*